

## Оценка вероятности дефолта эмитента по котировкам облигаций\*

**Игорь Волошин**, директор департамента по управлению финансовыми рисками ОАО «Кредитпромбанк», канд. техн. наук, г. Киев, e-mail: [IVoloshin@Kreditprombank.com](mailto:IVoloshin@Kreditprombank.com)  
\*Эта статья является переводом статьи, принятой к печати в журнал «Банківська справа», №5, 2009 (г. Киев).

Вероятность дефолта является одним из важнейших показателей кредитного риска, с помощью которого рассчитывают резервы на покрытие убытков от кредитных рисков, цены на кредитные продукты и т.п. Для оценки вероятности дефолта эмитента наряду с актуарными моделями используют подходы, основанные на анализе рыночных цен облигаций. Отметим, что в кризисные времена именно рыночные подходы привлекают все большее внимание практиков. Считается, что рыночная оценка является более точной, чем актуарная, поскольку рынок в каждый момент времени наиболее полно учитывает разнообразную информацию, которая может повлиять на цену<sup>1</sup>.

При определении вероятности дефолта используют различные модели процесса банкротства. Обычно считают, что процесс банкротства описывается пуассоновским процессом, предполагающим, что время до первого дефолта  $\tau$  распределено экспоненциально<sup>2,3</sup>:

$$\Phi(\tau) = 1 - \exp(-\lambda \cdot \tau),$$

где  $\Phi(\tau)$  – интегральная экспоненциальная функция распределения времени до первого дефолта;

$\lambda$  – ожидаемая интенсивность дефолта;

$\exp(x)$  – экспоненциальная функция.

Другой подход, разработанный Jarrow R.A., Lando D. и Turnbull S.M., основан на том, что процесс банкротства определяется марковским процессом миграции кредитных рейтингов. Тогда стоимость рискованной бескупонной облигации, не предполагающей никакого возмещения стоимости облигаций после дефолта эмитента, равна<sup>4</sup>:

$$v(t, T) = p(t, T) \cdot Q_i(\tau > T),$$

где  $v(t, T)$  – стоимость рискованной бескупонной облигации;

$p(t, T)$  – стоимость бескупонной облигации, свободной от риска;

$Q_i(\tau > T)$  – вероятность того, что дефолт возникнет после даты  $T$ ;

$t$  – текущий момент времени;

$T$  – срок погашения.

Предположение относительно вида процесса банкротства налагает определенные ограничения на оценку вероятности дефолта и требует проведения тестов на соответствие реального и модельного процессов.

В этой статье решается задача получения явной оценки условной вероятности дефолта без применения каких-либо предположений относительно вида процесса банкротства. Таким образом, процесс банкротства может быть произвольным. Условную вероятность дефолта эмитента в различные периоды существования облигации определяют с помощью кредитных спредов. Условность вероятности заключается в том, что эмитент может обанкротиться в определенный период времени  $t_i - t_{i-1}$  при условии, что он до этого  $t_{i-1}$  момента времени останется «жив».

<sup>1</sup> Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А.Лобанова и А.В. Чугунова. – М.: Альпина Паблишер, 2003. – 786 с.

<sup>2</sup> Артеменко О. Модель расчета предполагаемой вероятности дефолта и ее использование в оценке стоимости долговых инструментов // Рынок ценных бумаг. – 2000. – №9(168). – С. 67-68.

<sup>3</sup> Юдинцев С.П. Экзогенные модели дефолта. Режим доступа: <http://www.riskland.ru/lib/free/exogen.pdf>.

<sup>4</sup> Jarrow R.A., Lando D., Turnbull S.M. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads // The Review of Financial Studies. – 1997. – V.10. – N. 2. – P. 481-523.

Для упрощения изложения материала в данной статье будем рассматривать рискованные облигации с фиксированными купонными платежами, без оферт и без возмещения части стоимости облигаций после дефолта эмитента, т. е. при условии, что  $recovery\ rate = 0$ . Кроме того, пренебрежем премиями за ликвидность. Иначе говоря, будем считать, что облигации подвергаются исключительно кредитному риску.

Представим приведенную стоимость рискованной облигации в виде:

$$PV = \sum_{i=1}^N (C \cdot D_i) + U \cdot D_N, \quad (1)$$

где  $C$  – купонный платеж;

$U$  – номинальная стоимость облигации;

$$D_i = \exp(-R(t_i) \cdot t_i) \quad (2)$$

– дисконтный множитель;

$R(t_i)$  – рискованная спот-ставка для срока погашения  $t_i$ ;

$t_i$  – момент  $i$ -ого купонного платежа;

$N$  – номер завершающего платежа (погашения последнего купона и номинала облигации).

В дальнейшем воспользуемся подходом, разработанным Философовым Л.В.<sup>5</sup>. Особенность этого подхода состоит в том, что он основывается на использовании условных вероятностей дефолта.

Этот подход предполагает, что если дефолт произойдет перед первым платежом, то банк не получит ничего. Если дефолт произойдет между первым и вторым платежом, то банк получит только первый платеж и т.д. Все возможные сценарии для приведенной стоимости облигации сведены в таблицу 1. При этом весь срок существования облигации разбит на  $N$  периодов, которые соответствуют датам плановых платежей по облигации.

Отметим, что в таблице 1 используются такие обозначения:

$P_{N+1}$  – вероятность дефолта после срока погашения облигации;

$$d_i = \exp(-r(t_i) \cdot t_i) \quad (3)$$

– дисконтный множитель;

$r(t_i)$  – безрисковая спот-ставка для срока погашения  $t_i$ .

Таблица 1. Приведенная стоимость облигации для различных сценариев<sup>5</sup>.

Номер платежа	Периоды	Условная вероятность дефолта в периоде	Приведенная стоимость облигации в периоде
1	$t_1 - t_0$	$P_1$	$PV_1 = 0$
2	$t_2 - t_1$	$P_2$	$PV_2 = C \cdot d_1$
3	$t_3 - t_2$	$P_3$	$PV_3 = \sum_{i=1}^2 C \cdot d_i$
...	...	...	...
$N$	$t_N - t_{N-1}$	$P_N$	$PV_N = \sum_{i=1}^{N-1} C \cdot d_i$
$N+1$	$t_{N+1} - t_N$	$P_{N+1}$	$PV_{N+1} = \sum_{i=1}^N C \cdot d_i + U \cdot d_N$

Ожидаемая приведенная стоимость облигации согласно Философова Л.В.<sup>5</sup> равна:

<sup>5</sup> Philosophov L.V. Assessing Validity of the Basel II Model in Measuring Risk of Credit Portfolios, 26 January 2006. – [http://papers.ssrn.com/sol3/cf\\_dev/AbsByAuth.cfm?per\\_id=296622](http://papers.ssrn.com/sol3/cf_dev/AbsByAuth.cfm?per_id=296622).

$$E(PV) = \sum_{i=1}^{N+1} (PV_i \cdot P_i). \quad (4)$$

Подставляя произведения стоимости облигаций на вероятности реализации данного сценария из таблицы 1 в формулу (4), получим:

$$PV = \sum_{i=1}^N \left( C \cdot d_i \cdot \left( \sum_{j=i+1}^{N+1} P_j \right) \right) + U \cdot d_N \cdot P_{N+1}. \quad (5)$$

Учитывая, что условные вероятности дефолта образуют полную систему событий, избавимся от вероятности дефолта после срока погашения облигации  $P_{N+1}$ :

$$PV = \sum_{i=1}^N \left( C \cdot d_i \cdot \left( 1 - \sum_{j=1}^i P_j \right) \right) + U \cdot d_N \cdot \left( 1 - \sum_{j=1}^N P_j \right). \quad (6)$$

Сравнивая выражения (1) и (6) для приведенных стоимостей облигации, получим уравнение для связи дисконтных множителей, рассчитанных по рисковому и безрисковому спот-ставкам:

$$D_i = d_i \cdot \left( 1 - \sum_{j=1}^i P_j \right) \quad (7)$$

Подставляя в формулу (7) выражения (2) и (3) для дисконтных множителей и учитывая, что кредитный спред для срока погашения  $t_i$  равняется:

$$s(t_i) = R(t_i) - r(t_i), \quad (8)$$

получим связь условных вероятностей дефолта с кредитными спредами:

$$\sum_{j=1}^i P_j = 1 - \exp(-s(t_i) \cdot t_i) \quad (9a)$$

или в непрерывной форме:

$$\int_0^t P(x) \cdot dx = 1 - \exp(-s(t) \cdot t) \quad (9b)$$

Дифференцируя выражение (9b), получим явную зависимость условных вероятностей дефолта от кредитных спредов:

$$P(t) = (s(t) \cdot t)' \cdot \exp(-s(t) \cdot t) \quad (10)$$

где штрихом обозначена первая производная по времени.

Отметим, что поскольку вероятности являются положительными величинами, то величина  $(s(t) \cdot t)'$  в формуле (10) должна быть также положительной. Из чего следует также ограничение для кривых рисковых доходностей:

$$(R(t) \cdot t)' \geq (r(t) \cdot t)'. \quad (11)$$

Приведем конкретный пример.

Алгоритм расчета состоит из следующих этапов.

1. Определение рисковых спот-ставок  $R(t)$  доходности бескупонной облигации по котировкам рискованной купонной облигации, используя подходящий алгоритм (см., например, обзор<sup>6</sup>).

В данной работе использован подход, основанный на аналитическом обращении функциональной связи между спот-ставками и ценовыми параметрами облигации. Подход детально изложен в работе<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Philosophov L.V. Assessing Validity of the Basel II Model in Measuring Risk of Credit Portfolios, 26 January 2006. – [http://papers.ssrn.com/sol3/cf\\_dev/AbsByAuth.cfm?per\\_id=296622](http://papers.ssrn.com/sol3/cf_dev/AbsByAuth.cfm?per_id=296622).

<sup>6</sup>Чеготов М.В., Лобанов А.А. Построение кривой доходности на основе аналитического обращения функциональной связи между рыночными данными и параметрами облигаций // Управление финансовыми рисками. – 2006. – №04(08). – С. 336-342.

2. Нахождение безрисковых спот-ставок  $r(t)$  доходности бескупонной облигации (кривые ZCYC) или использование готовых расчетов, предоставляемых информационными агентствами, например, Reuters или Bloomberg.

3. Расчет кредитного спреда  $s(t)$  по формуле (8).

4. Расчет условных вероятностей дефолта  $P(t)$  по формуле (10).

Входными данными для примера служили котировки облигаций в долларах США (см. таблицу 2) и кривые доходности (ZCYC) безрисковых бескупонных облигаций в долларах США (см. таблицу 3), которые были любезно предоставлены г-ном Вальчишиным О.В. из компании ОАО «Инвестиционный капитал -Украина» (Киев).

Таблица 2. Котировка облигаций в долларах США по состоянию на 19 февраля в 2009 г.

№ з/п	ISIN	Эмитент	Кредитный рейтинг	Купон	Частота выплаты купона	Дата погашения	Цена
1	US448814ET67	HYDRO QUEBEC	Aa2	8.5	Раз в полгода	01.12.29	136.75
2	US302583AD18	FLORIDA POWER & LIGHT CO	AAA	5.2555	Раз в полгода	01.08.19	104.08
3	FPLPW 5.044 01/02/2011	FLORIDA POWER & LIGHT CO	AAA	5.044	Раз в полгода	01.02.11	101.55
4	PEDEL 6.202 15/11/2032	PEDERNALES ELECTRIC COOP INC	AA-	6.202	Раз в полгода	15.11.32	94.51
5	PEDEL 4.093 15/11/2012	PEDERNALES ELECTRIC COOP INC	AA-	4.093	Раз в полгода	15.11.12	96.7
6	CADEGD 4.250 30/09/2009	COMPAGNIE DE FINANCEMENT FONCIER	AAA	4.25	Раз в год	30.09.09	100.26
7	CADEGD 4.600 14/03/2018	COMPAGNIE DE FINANCEMENT FONCIER	AAA	4.6	Раз в полгода	14.03.18	99.88
8	USE11805AN38	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA SA	AA-	5.75	Раз в год	20.07.17	100.75
9	US060505CC65	BANK OF AMERICA CORP	A+	1.58625	Квартально	24.03.09	99.95
10	US060505DC56	BANK OF AMERICA CORP	A+	2.27313	Квартально	21.05.10	97.95

Таблица 3. Кривые доходности (ZCYC) безрисковых бескупонных облигаций в долларах США по состоянию на 19 февраля в 2009 г.

Срок погашения														
ON	1W	1M	2M	3M	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	10Y	15Y	20Y	25Y	30Y
0.1272	0.4629	0.8963	1.0673	1.1278	1.189	1.292	1.6156	1.9829	2.5583	3.1693	3.397	3.3934	3.3621	3.34

Результаты расчета рисковых спот-ставок и кредитных спредов в зависимости от сроков погашения представлены на рис. 1.

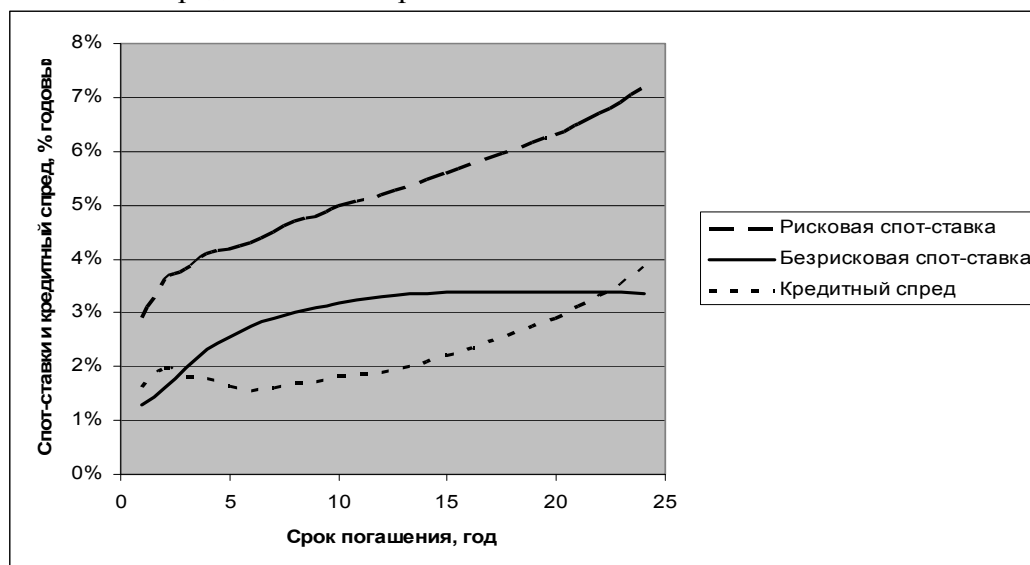


Рис. 1. Кривые доходности рисковей и безрисковой бескупонных облигаций в долларах США и кредитные спреды.

На рис. 2 представлены результаты расчета условных вероятностей дефолта в зависимости от срока погашения.

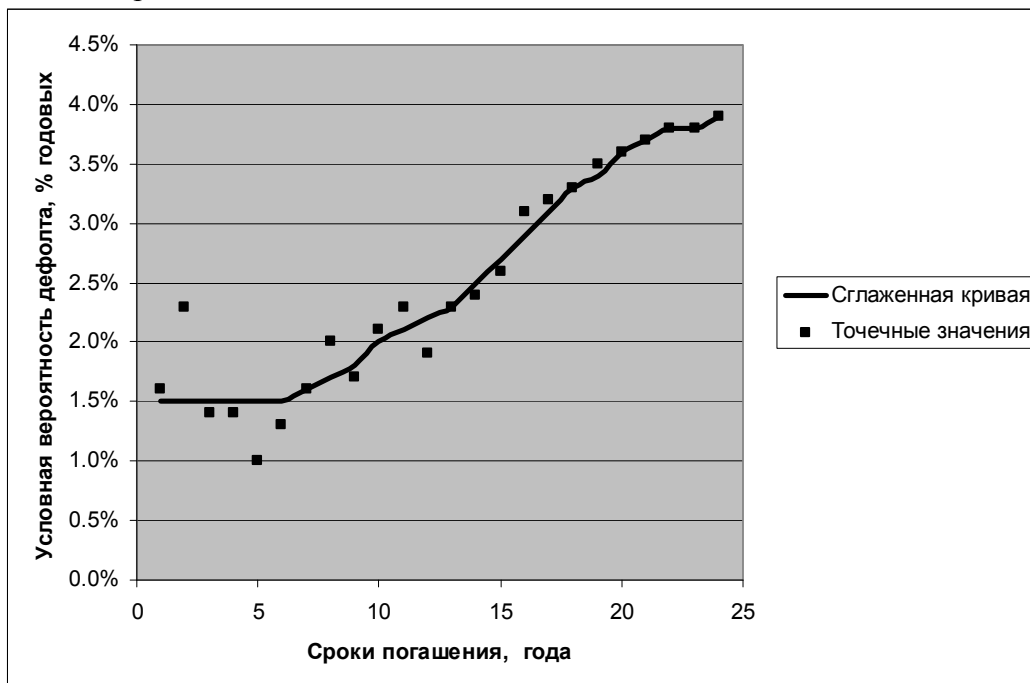


Рис. 2. Сглаженная кривая и точечные значения условной вероятности дефолта эмитентов выбранных облигаций в долларах США.

Таким образом, в этой статье предложен явный метод оценки условной вероятности дефолта эмитента по котировкам облигаций, имеющих близкие кредитные рейтинги. Метод свободен от каких-либо ограничений относительно вида случайного процесса банкротства.